ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO VI

12/01/2024

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile.
Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Enunciare il teorema per la classificazione degli estremi liberi mediante la matrice Hessiana.

(b) Calcolare massimi e minimi per la funzione di due variabili

$$f(x,y) = e^{-(2x^2+y^2+x^2y)}.$$

Esercizio 2.

(a) Si calcoli, <u>senza</u> cambi di coordinate, il flusso uscente del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

(b) Verificare, <u>senza</u> cambi di coordinate, la formula del Teorema della Divergenza nel caso del punto (a).

Esercizio 3.

(a) Dare la definizione di integrale di prima specie per una funzione f lungo una curva regolare $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$, tale che il sostegno di γ sia contenuto nel dominio di f.

(b) Calcolare l'integrale di prima specie della funzione $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Esercizio 4. Verificare che l'equazione

$$\tan x - e^y \sin(x+y) = 0$$

definisce implicitamente una funzione implicita $y = y(x)$ nell'intorno del punto $(0,0)$ e calcolare $y'(0)$.

Soluzioni

1a. Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con x_0 punto critico per f. Allora x_0 è di minimo locale (risp. massimo locale) forte se la matrice Hessiana è definita positiva (risp. negativa), di sella se è indefinita.

1b. Osserviamo che la funzione $f(t) = e^t$ è una funzione monotona crescente. Quindi basta studiare la natura dei punti critici della funzione interna $g(x, y) = -(2x^2 + y^2 + x^2 y)$. $\nabla g = -(4x + 2xy, 2y + x^2) = (0, 0)$ se e solo se $y = -\frac{x^2}{2}$ e $4x - x^3 = 0$, quindi $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (2, -2)$ e $(x, y) = (-2, -2)$. La matrice Hessiana è data da

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -4 - 2y & -2x \\ -2x & -2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

che valutata nei punti critici precedentemente determinati è: $H(0, 0)$ definita positiva, quindi $(0, 0)$ di massimo locale; $H(2, -2)$ indefinita, quindi $(2, -2)$ sella; $H(-2, -2)$ indefinita, quindi $(-2, -2)$ sella.

2a. Σ è la sfera unitaria centrata nell'origine. Il vettore uscente è $n = (x, y, z)$, quindi

$$Flusso = \int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_\Sigma d\sigma = 4\pi,$$

ovvero la misura di superficie della sfera unitaria.

2b. Per il Teorema della Divergenza, il flusso uscente del campo è uguale all'integrale di volume della divergenza del campo. Quindi

$$\begin{aligned} Flusso &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \nabla \cdot F \, dxdydz \\ &= 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} dxdydz = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la nota formula per il volume della sfera unitaria.

3a. L'integrale è definitio da

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

3b. Si ha che $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, quindi $|\gamma'(t)| = 1$. Dunque

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dt}(\arctan(\sin t)) \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

4. Si ha che $f \in C^1$, inoltre $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f = (1 + \tan^2 x - e^y \cos(x + y), -e^y \sin(x + y) - e^y \cos(x + y))$, con $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$. Quindi valgono le ipotesi del Dini e si ha che

$$y'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = 0.$$